

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»**

**Кафедра физики
В.А. Петросов**

ФИЗИКА

ПОСОБИЕ

по выполнению лабораторной работы М-11

**ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА
НА УСТАНОВКЕ «ГИРОСКОП»**

*для студентов I курса
всех специальностей
всех форм обучения*

Москва - 2009

ББК 53
И 89

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, проф. В.Д. Козлов
канд. техн. наук, проф. С.М. Новиков

Петросов В.А.

И 89 Физика.: Пособие по выполнению лабораторной работы М-11. – М.: МГТУ ГА, 2009. - 16 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.Ф. 03 «Физика» по Учебному плану всех специальностей, утвержденному в 2007 г., для студентов I курса всех форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 25.12.08 г. и методического совета 22.01.09 г.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА М-11

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА НА УСТАНОВКЕ «ГИРОСКОП»

1. Цель работы

Изучение законов динамики абсолютно твердого тела на примере гироскопа, опытное определение момента инерции гироскопа.

2. Подготовка к работе

Изучите теоретический материал по лекциям или учебнику [1–3], а именно: модель абсолютно твердого тела, уравнения динамики для поступательного и вращательного движений твердого тела, понятия момента силы, момента импульса, момента инерции. Изучите также раздел 3 методического описания. Ознакомьтесь с конструкцией лабораторного стенда, методикой эксперимента, порядком проведения измерений и обработки их результатов (разделы 4, 5, 6 методического описания). Сделайте проект отчета по лабораторной работе. Подготовьтесь отвечать на вопросы из раздела 7 данного описания.

3. Краткая теория

Второй абстракцией (после модели материальной точки – МТ), с которой приходится иметь дело в механике, является модель **абсолютно твердого тела** (АТТ) – тела, деформациями которого можно пренебречь. Всякое движение АТТ можно разложить на два основных вида движения – поступательное и вращательное. В частности, можно сложное движение АТТ рассматривать как движение центра масс АТТ и вращательное движение АТТ вокруг оси, проходящей через его центр масс.

Сам центр масс АТТ движется так, как двигалась бы материальная точка с массой m , равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил:

$$m\vec{a}_{\text{цм}} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{внешн}} \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{P}_{\text{цм}}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{внешн}}, \quad (1)$$

где $\vec{P}_{\text{цм}}$ – импульс центра масс АТТ:

$$\vec{P}_{\text{цм}} = m\vec{v}_{\text{цм}} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

Динамика вращательного движения АТТ вокруг точки или центра (например, центра масс) описывается аналогичным по форме уравнением, которое называется **основным уравнением динамики вращательного движения АТТ**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{i,\text{внешн}}, \quad (2)$$

где \vec{L} и $\vec{M}_{i,\text{внешн}}$ – момент импульса АТТ относительно центра вращения и моменты внешних сил относительно центра вращения:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i, \quad \vec{M}_{i,\text{внешн}} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\text{внешн}}.$$

В проекции на ось вращения, проходящей через этот центр вращения (пусть это будет ось Oz), это уравнение имеет вид:

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \beta_z = \sum_i M_{z,i,\text{внешн}}, \quad (2a)$$

где $L_z = I_z \omega_z$ – проекция \vec{L} на ось Oz (являющуюся осью вращения), I_z – момент инерции АТТ относительно оси вращения Oz , ω_z и β_z – угловая скорость и угловое ускорение вращательного движения АТТ вокруг оси Oz , $M_{z,i,\text{внешн}}$ – проекции моментов внешних сил относительно центра вращения на ось Oz .

Момент силы относительно оси характеризует способность силы ускорять или замедлять вращательное движение тела вокруг этой оси. Его можно определить по формуле:

$$M_z = R \cdot F_{\perp}, \quad (3)$$

где R – плечо силы относительно оси Oz (рис. 1), F_{\perp} – составляющая силы, направленная по касательной к окружности радиуса R . Если вектор \vec{F}_{\perp} образует с направлением оси z правовинтовую систему, то проекция момента силы M_z имеет положительный знак.

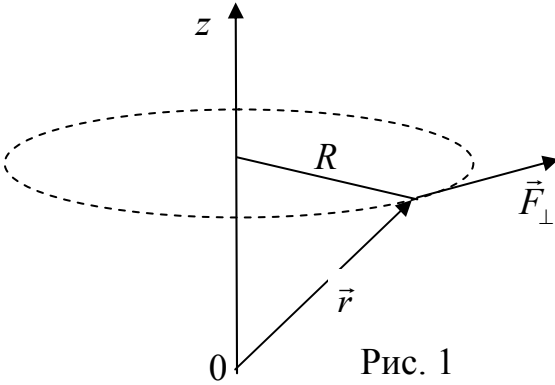


Рис. 1

Таблица

Характеристики движения твердого тела

Поступательное движение	Вращательное движение (вокруг оси)
Масса (инерция) m	Момент инерции I
Скорость \vec{v}	Угловая скорость $\vec{\omega}$
Сила \vec{F}	Момент силы $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Импульс $\vec{P} = m\vec{v}_{\text{цм}}$	Момент импульса $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Проекция импульса $P_x = mv_{x,\text{цм}}$	Проекция момента импульса $L_z = I_z \omega_z$
Уравнения динамики (и проекции)	
$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\beta}$
$F_x = \frac{dP_x}{dt} = ma_x$	$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \beta_z$
Кинетическая энергия	
$T = \frac{mv^2}{2}$	$T = \frac{I_z \omega_z^2}{2}$

Сопоставляя формулы и параметры вращательного (вокруг оси) и поступательного движений, приведенные в таблице выше, можно сделать вывод, что во всех случаях наблюдается подобие или эквивалентность величин, в частности, соответствие между моментом инерции и массой. Поэтому можно сделать заключение, что момент инерции характеризует инертные свойства тела во вращательном движении.

Величина момента инерции твердого тела зависит от массы и ее распределения относительно оси вращения. Задача расчета момента инерции сводится к суммированию в случае дискретного распределения массы или к интегрированию при непрерывном распределении массы по объему V :

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 \quad \text{или} \quad I_z = \int_V \rho R^2 dV, \quad (4)$$

где $R_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ – радиус вращения массы m_i с координатами x_i, y_i вокруг оси Oz ; ρ – плотность материала, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиус вращения элемента объема dV с координатами x, y , имеющего массу ρdV . Формулы (4) отражают свойство **аддитивности** момента инерции – момент инерции АТТ, состоящего из нескольких частей, равен сумме моментов инерции этих частей.

Для расчета момента инерции тела I_z относительно произвольной оси Oz используют **теорему Штейнера**:

$$I_z = I_{Oz} + ma^2, \quad (5)$$

где I_{Oz} – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной заданной оси Oz , a – расстояние между этими осями, m – масса тела.

В большинстве случаев формула для расчета момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, имеет вид:

$$I_0 = kmR^2, \quad (6)$$

где $k \leq 1$ – коэффициент, зависящий от формы тела, m – масса тела, R – радиус вращения точки тела, максимально удаленной от оси. Например, для обруча или кольца малой толщины $k = 1$, для диска (сплошного цилиндра) $k = 1/2$, для стержня (относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину) $k = 1/12$, для шара $k = 2/5$.

4. Описание установки и методика проведения эксперимента

Гироскопом называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью ω вокруг оси симметрии.

В экспериментальной установке (рис. 2) гироскопом служит массивный металлический диск 1, закрепленный на оси электродвигателя 4, приводящего гироскоп во вращение. К корпусу электродвигателя вдоль его оси присоединена металлическая планка 2 (со шкалой), по которой может перемещаться противовес 3. Корпус двигателя закреплен в шарнире 5, горизонтальная ось которого

перпендикулярна оси гироскопа. Шарнир 5 закреплён на платформе 6, которая может вращаться относительно вертикальной оси. Ось гироскопа (совпадающая с осью двигателя), ось шарнира 5 и ось платформы 6 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке, которую называют центром подвеса (или центром вращения) гироскопа. Горизонтальное положение оси гироскопа обеспечивается противовесом 3 известной массы m . Смещая противовес вдоль планки 2, можно создавать момент силы тяжести относительно центра подвеса.

Установка снабжена электронным блоком 7, который позволяет измерять частоту вращения гироскопа n (об/мин) и время t поворота оси гироскопа в горизонтальной плоскости на заданный угол φ , отсчитываемый по шкале 8 относительно указателя 9. Частота вращения гироскопа регулируется ручкой 10 и измеряется по шкале 11. Измерение времени поворота оси гироскопа на заданный угол может производиться автоматически с помощью датчика угла поворота (показание на табло 12) и секундомера (показание на табло 13), которые встроены в блок 7. Эту же операцию можно осуществлять и без использования блока 7, измеряя время поворота (с помощью какого-либо секундомера) на выбранный угол.

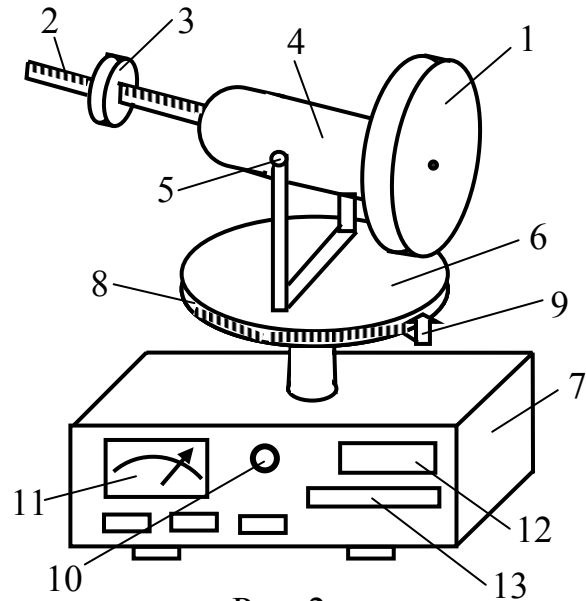


Рис. 2

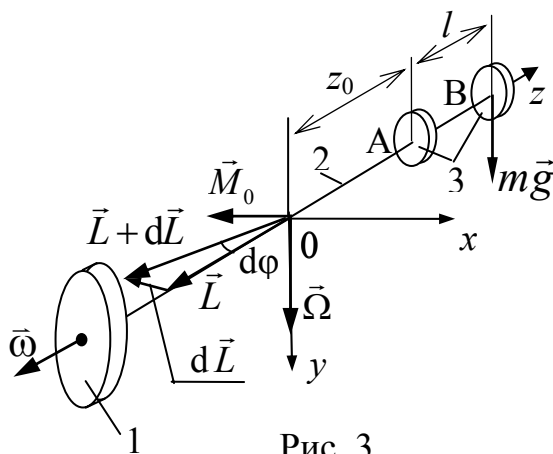


Рис. 3

Принципиальная схема установки показана на рис. 3, где 1 – вращающийся вокруг оси z массивный диск (гироскоп), 2 – планка (ось гироскопа), вдоль которой можно перемещать груз 3; точка 0 – начало системы координат, где расположен центр вращения гироскопа; точка А – положение груза 3, когда гироскоп уравновешен, т.е. ось гироскопа в отсутствие вращения горизонтальна ($0A = z_0$); точка В – положение груза 3, когда гироскоп неуравновешен ($AB = l$), в этом случае появляется воздействующий на гироскоп момент \vec{M}_0 силы $m\vec{g}$ (перпендикулярной оси гироскопа), при этом $M_0 = mgl$, а сам вектор \vec{M}_0 параллелен оси x .

при этом $M_0 = mgl$, а сам вектор \vec{M}_0 параллелен оси x .

В уравновешенном положении (груз 3 расположен в точке А) гироскоп вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и обладает моментом импульса $\vec{L} = I\vec{\omega}$, где I – момент инерции гироскопа. Суммарный момент сил, действующих на уравновешенный гироскоп, равен нулю, и тогда в соответствии с (2):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \vec{L} = \text{const},$$

т.е. ось вращающегося гироскопа горизонтальна и неподвижна.

Поместим груз 3 на некоторое (короткое) время dt в точку В; тогда появляется момент сил \vec{M}_0 , и в соответствии с (2) за время dt произойдет изменение (приращение) момента импульса:

$$d\vec{L} = \vec{M}_0 dt, \quad (7)$$

причем вектор $d\vec{L}$ параллелен вектору \vec{M}_0 , а поэтому перпендикулярен вектору \vec{L} (рис. 3). Таким образом, вектор момента импульса гироскопа $\vec{L} + d\vec{L}$ займет в пространстве новое положение, которое будет сохраняться, если груз 3 вернуть в точку А. В новом положении ось гироскопа повернута в горизонтальной плоскости xOz на некоторый угол $d\varphi$, при этом величина $L = I\omega$ не меняется (т.е. сохраняется угловая скорость ω), а $dL = Ld\varphi$.

Если груз 3 оставить в точке В, то в этом (новом) положении оси гироскопа (по прошествии времени dt) ситуация не изменится, т.е. также действует момент \vec{M}_0 , $M_0 = mgl$, а векторы $\vec{L} + d\vec{L}$ и \vec{M}_0 взаимно перпендикулярны. Следовательно, опять за время dt ось гироскопа повернется на такой же угол $d\varphi$. Это означает, что происходит непрерывный поворот оси вращения гироскопа в горизонтальной плоскости xOz с угловой скоростью Ω :

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (8)$$

Это вращение оси гироскопа с частотой Ω называют прецессией или регулярной прецессией, когда хотят подчеркнуть постоянство этой угловой скорости. Явление, состоящее в том, что усилие, направленное на поворот оси гироскопа в вертикальной плоскости yOz (рис. 3), вызывает поворот оси гироскопа в горизонтальной плоскости xOz , а также свойство гироскопа сохранять направление оси вращения в отсутствие внешних сил называют гироскопическим эффектом; это свойство гироскопа широко используется в технике (например, в авиации и космонавтике). Обычно на практике $\Omega \ll \omega$, и именно для выполнения условия $\Omega \ll \omega$ в определении понятия гироскопа используются слова – массивное тело, вращающееся с «большой угловой скоростью ω ».

Из соотношений:

$$dL = L \cdot d\varphi \quad \text{и} \quad dL = M_0 \cdot dt$$

легко получить:

$$L \cdot d\varphi = M_0 \cdot dt \quad \rightarrow \quad \Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_0}{L} = \frac{mgl}{I\omega}. \quad (9)$$

Величину скорости прецессии Ω можно определять (вычислять) как отношение угла прецессионного поворота φ к времени этого поворота t (при $\Omega = \text{const}$). Тогда соотношение (9) можно представить в виде:

$$\Omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{mgl}{I\omega}. \quad (10)$$

Будем считать, что m , g и I – постоянные величины, а l , n (следовательно, и ω), φ и t – переменные. Три из них мы можем произвольно задавать (используя при этом мерительный инструмент), это φ , l и n , а одну – время t – измерять. Тогда можно реализовать три ситуации при проведении измерений.

1). Задаём (фиксируем) две величины $l = l_0$ и $n = n_0$ (следовательно, задаём и $\omega = \omega_0$), а третью варьируем, выбирая несколько конкретных значений $\varphi = \varphi_i$. Им будут соответствовать измеренные значения $t = t_i$, а следовательно, и Ω_i . В этом случае можно исследовать вопрос о постоянстве скорости прецессии Ω (т.е. о регулярности прецессии), изучая зависимость $\Omega = f(\varphi)$ или $\Omega = f(t)$ (линейная зависимость).

2). Фиксируем величины $\varphi = \varphi_0$ и $n = n_0$ (следовательно, $\omega = \omega_0$), варьируем величину l ($l = l_i$) и получаем (измеряем) соответствующие $t = t_i$, а следовательно и Ω_i . Здесь можно исследовать линейную зависимость $\Omega = f(l) = a_l l$ с угловым коэффициентом наклона прямой, проходящей через начало координат:

$$\Omega = \frac{mg}{I\omega_0} l = a_l l \quad \rightarrow \quad a_l = \frac{mg}{I\omega_0}. \quad (11)$$

3). Задаём величины $\varphi = \varphi_0$ и $l = l_0$, варьируем величину n ($n = n_i$) и измеряем соответствующие $t = t_i$, а следовательно и Ω_i . Здесь можно исследовать линейную зависимость $\Omega = f(1/\omega) = a_\omega \cdot (1/\omega)$ с угловым коэффициентом наклона прямой, проходящей через начало координат:

$$\Omega = \frac{mgl_0}{I} \frac{1}{\omega} = a_\omega \frac{1}{\omega} \quad \rightarrow \quad a_\omega = \frac{mgl_0}{I}. \quad (12)$$

Во всех трёх случаях можно найти величины момента инерции I , а затем сравнить полученные результаты, причём не только по величинам I , но и δI – относительным погрешностям измерений. В первом случае для определения I_φ можно воспользоваться соотношением (10), а в двух других – используя соотношения (11) и (12), определяющие коэффициенты a_l и a_ω :

$$I_\varphi = \frac{mgl_0}{\Omega\omega_0}, \quad I_l = \frac{mg}{a_l\omega_0}, \quad I_\omega = \frac{mgl_0}{a_\omega}. \quad (13)$$

В работе мы воспользуемся всеми этими возможностями, в частности, – будем варьировать величины l и n (т.е. ω). Построив графики линейных зависимостей $\Omega = f(l)$ и $\Omega = f(1/\omega)$, в обоих случаях легко найти угловые коэффициенты наклона прямых $a_{\text{гр}}$ (a_l и a_ω), а затем можно найти и погрешности определения этих угловых коэффициентов $\Delta a_{\text{гр}}$.

Существует и аналитический способ определения угловых коэффициентов и их погрешностей, базирующийся на так называемом методе наименьших

квадратов (МНК). В случае прямой, проходящей через начало координат, используют следующие соотношения:

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \quad \sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\frac{\sum y_i^2}{\sum x_i^2} - a^2 \right)}, \quad \Delta a = t_{P,n-1} \sigma_a, \quad (14)$$

где σ_a – стандартная погрешность (отклонение), $t_{P,n-1}$ – коэффициент Стьюдента. В нашем случае роль y_i играет Ω_i , а роль x_i – соответственно l_i или $1/\omega_i$.

5. Порядок выполнения работы

5.1. Подготовка установки к работе

5.1.1. Освободив винт, закрепляющий груз 3 на планке 2 (рис. 2), и перемещая груз вдоль планки, уравновесить ось гироскопа в горизонтальном положении. Закрепить груз 3 винтом в этом положении (точка А с координатой z_A на рис. 3) и по шкале планки 2 определить значение $z_0 = z_A$, совпадающее, например, с правой плоскостью груза. Записать значение z_0 в табл. 1.

5.1.2. Установить ручку 10 регулировки угловой скорости вращения диска 1 в крайнее левое положение, включить установку в сеть 220 В.

5.1.3. Нажатием красной кнопки на электронном блоке 7 включить установку.

Предупреждение. Скорость вращения гироскопа может достигать 10000 об/мин, поэтому проведение измерений требует соблюдения техники безопасности, аккуратности и хорошего понимания последовательности действий.

Таблица вариантов *)

	Пробный эксперимент (Эксп. №1 – Табл. 1)			Зависимость $\Omega=f(l)$ (Эксп. №2 – Табл. 2)		Зависимость $\Omega=f(1/\omega)$ (Эксп. №3 – Табл. 3)	
	l м	n об/мин	φ град	n_0 об/мин	φ град	l_0 м	φ град
Бригада 1	0,040	4000	30	5000	30	0,040	30
Бригада 2	0,035	3500	40	5000	40	0,040	40
Бригада 3	0,045	4500	30	4500	30	0,035	30
Бригада 4	0,040	3500	40	4500	40	0,035	40

*) – начальные условия (таблица вариантов), объем экспериментальных заданий (упражнений) и порядок их выполнения может корректироваться преподавателем.

5.2. Проведение пробного эксперимента (табл. 1)

5.2.1. Медленно вращая ручку 10 (рис. 2), установить по шкале 11 значение n угловой скорости вращения диска 1 (гироскопа), близкое к величине из таблицы вариантов. Для стабилизации частоты вращения гироскопа выждать некоторое время (~1 мин) и записать установившееся значение в табл. 1.

5.2.2. Поддерживая рукой планку 2 (рис. 2) в горизонтальном положении, сдвинуть груз 3 в положение В с координатой z_B , обеспечивающее значение l , взятое из таблицы вариантов; произвести соответствующую запись в табл. 1.

5.2.3. Измерить время t поворота платформы 6 на угол φ , взятый из таблицы вариантов. Записать результат измерения в табл. 1.

5.2.4. Рассчитать и записать в табл. 1 значения угловой скорости вращения диска ω и угловой скорости прецессии Ω :

$$\omega = 2\pi \frac{n(\text{об/мин})}{60} \approx 0,105n \left(\frac{1}{\text{с}} \right), \quad \Omega = \frac{\varphi}{t} \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right). \quad (15)$$

5.2.5. Пользуясь формулой (10), определить экспериментальную величину момента инерции гироскопа $I_{\text{эксп}}$; масса m груза 3 выгравирована на его боковой поверхности. Полученный результат можно рассматривать как единичное косвенное измерение (определение) величины момента инерции гироскопа. Сравнить значение $I_{\text{эксп}}$ с теоретической оценкой $I_{\text{теор}} = 0,5mR^2$ (массу m и радиус R диска оценить самостоятельно «на глаз», т.е. очень приближённо). Записать величины $I_{\text{эксп}}$ и $I_{\text{теор}}$ в табл. 1 и показать преподавателю.

5.2.6. Вычислить (в соответствии с (10) и (13)) относительную δI и абсолютную ΔI погрешности измерения момента инерции гироскопа:

$$\delta I = \sqrt{(\delta t)^2 + (\delta \varphi)^2 + (\delta l)^2 + (\delta \omega)^2 + (\delta m)^2} \rightarrow \Delta I = I \cdot \delta I,$$

где для относительных погрешностей измерения (или задания) времени, угла поворота, координаты груза, угловой скорости вращения гироскопа и массы груза можно принять следующие значения:

$$\delta t = 1\%, \quad \delta \varphi = 2\%, \quad \delta l = 3\%, \quad \delta \omega = \delta n = 4\%, \quad \delta m = 1\%.$$

(При ручном измерении времени и угла погрешности возрастут: $\delta t = (5 - 10)\%$, $\delta \varphi = 4\%$.) Результаты расчёта без округления записать в табл. 1.

5.2.7. После округления записать результат измерения момента инерции гироскопа $I_{\text{эксп}}$ в стандартной форме в табл. 1 и показать преподавателю.

5.3. Исследование зависимости $\Omega = f(l)$ (табл. 2)

5.3.1. Аналогично п. 5.2.1. установить по шкале 11 значение угловой скорости вращения диска $n = n_0$, близкое к величине из таблицы вариантов. Величину n_0 записать в табл. 2.

5.3.2. Поддерживая рукой планку 2 в горизонтальном положении аналогично п. 5.2.2, сдвинуть груз 3 в положение В с координатой z_B , обеспечивающее значение $l = l_1 = 3$ см; произвести соответствующую запись в табл. 2.

5.3.3. Аналогично п. 5.2.3, измерить время t_1 поворота платформы 6 на угол φ , взятый из таблицы вариантов. Записать результат измерения в табл. 2.

5.3.4. Повторить измерения времени t_i поворота платформы 6 на тот же угол φ (аналогично п.п. 5.3.1.–5.3.3.) ещё четыре раза ($i = 2, 3, 4, 5$), каждый раз увеличивая l на 1 см. Результаты записать в табл. 2.

5.4. Исследование зависимости $\Omega = f(1/\omega)$ (табл. 3)

5.4.1. Аналогично п. 5.2.1. установить по шкале 11 значение угловой скорости вращения диска $n = n_1 = 3000$ об/мин. Величину n_1 записать в табл. 3.

5.4.2. Поддерживая рукой планку 2 в горизонтальном положении аналогично п. 5.2.2, поместить груз 3 в положение В с координатой z_B , обеспечивающее значение $l = l_0$ в соответствии с таблицей вариантов; произвести соответствующую запись в табл. 3.

5.4.3. Аналогично п. 5.2.3, измерить время t_1 поворота платформы 6 на угол φ , взятый из таблицы вариантов. Записать результат измерения в табл. 3.

5.4.4. Повторить измерения времени t_i поворота платформы 6 на тот же угол φ (аналогично п.п. 5.4.1.–5.4.3.) ещё четыре раза ($i = 2, 3, 4, 5$), каждый раз увеличивая n на 1000 об/мин. При этом возможны два варианта действий.

1) Var. α : величину l_0 установить один раз на все пять измерений времени.

2) Var. β : перед каждым новым измерением времени заново устанавливать величину l_0 , предварительно произвольно изменив её значение.

Таким образом, мы имеем два варианта реализации эксперимента №3 – α и β (и можно выполнять оба). Результаты записать в табл. 3.

6. Обработка результатов измерений и оформление отчёта

6.1. и 6.2. По п.п. 5.1. и 5.2. обработка не производится.

6.3. Определение момента инерции гироскопа I_l по зависимости $\Omega = f(l)$

6.3.1. По данным табл. 2, используя формулы (15), рассчитать ω_0 – угловую скорость вращения диска 1 и Ω_i – угловые скорости прецессии при различных l_i (различных моментах силы $M_0 = mgl$). Записать результаты расчёта без округления в табл. 2.

6.3.2. По результатам расчетов в координатах $\Omega - l$, выбрав удобный масштаб, нанести экспериментальные точки (l_i, Ω_i) на координатную плоскость Ω/l . Максимально близко к точкам провести прямую линию (график $\Omega = f(l)$), которую следует рассматривать как результат графического усреднения опытных данных.

Замечание. График зависимости $\Omega(l)$ может не проходить через начало координат в результате возможной систематической погрешности измерения расстояния l груза 3.

Эта систематическая погрешность может возникнуть из-за ошибки при определении z_0 .

6.3.3. Определить коэффициент $a_{гр}$ наклона полученной прямой (графическим методом), результат записать в табл. 2.

6.3.4. Применяя аналитический метод (зависимости (14)), найти расчётные значения коэффициента наклона a_p и стандартной погрешности σ_p , при этом целесообразно использовать программное обеспечение лабораторного компьютера. Для этого необходимо войти в директорию «Обработка результатов ЛР», расположенную на рабочем столе компьютера, открыть файл «МНК $y = ax$ » и ввести полученные в эксперименте данные. Результаты расчёта без округления записать в табл. 2.

6.3.5. Вычислить абсолютную Δa и относительную δa погрешности определения коэффициента наклона прямой для доверительной вероятности (надёжности) $P = 0,68$ и числа измерений $n = 5$:

$$\Delta a = t_{P,n-1}\sigma_a, \quad \text{и} \quad \delta a = \frac{\Delta a}{a}. \quad (16)$$

Результаты расчёта без округления записать в табл. 2.

Замечание. Напомним, при $n \geq 10$ и $P = 0,68$ коэффициент Стьюдента $t = 1$. С уменьшением n этот коэффициент возрастает, и при $n = 5$ (т.е. в нашем случае) становится $t \approx 1,25$. Однако, на практике в такой ситуации иногда для упрощения и здесь принимают $t = 1$, т.е. за ошибку измерения принимают стандартную погрешность (как при $n \geq 10$).

6.3.6. Используя соотношение (13), найти величину момента инерции гироскопа I_l , результат без округления записать в табл. 2. Полученный результат можно рассматривать как единичное косвенное измерение (определение) величины момента инерции гироскопа.

6.3.7. Вычислить (в соответствии с (13)) относительную δI и абсолютную ΔI погрешности измерения момента инерции гироскопа:

$$\delta I = \sqrt{(\delta m)^2 + (\delta \omega_0)^2 + (\delta a)^2} \quad \rightarrow \quad \Delta I = I \cdot \delta I,$$

где для относительных погрешностей измерения (или задания) массы груза и угловой скорости вращения гироскопа можно принять следующие значения:

$$\delta m = 1\%, \quad \delta \omega = 4\%.$$

Результаты расчёта без округления записать в табл. 2.

6.3.8. После округления записать результат измерения момента инерции гироскопа I_l в стандартной форме в табл. 2.

6.4. Определение момента инерции гироскопа I_ω по зависимости $\Omega = f(1/\omega)$

6.4.1. По данным табл. 3, используя формулы (15), рассчитать ω_i – угловые скорости диска 1 и Ω_i – угловые скорости прецессии при различных ω_i (различных моментах импульса гироскопа $L = I\omega$). Записать результаты расчёта без округления в табл. 3.

6.4.2. По результатам расчетов в координатах $\Omega - 1/\omega$, выбрав удобный масштаб, нанести экспериментальные точки $(1/\omega_i, \Omega_i)$ на координатную плоскость $\Omega(1/\omega)$. Максимально близко к точкам провести прямую линию (график $\Omega = f(1/\omega)$), которую следует рассматривать как результат графического усреднения опытных данных.

6.4.3. Определить коэффициент $a_{гр}$ наклона полученной прямой (графическим методом), результат записать в табл. 3.

6.4.4. Аналогично п. 6.3.4., найти расчётные значения коэффициента наклона a_p и стандартной погрешности σ_p , при этом следует использовать программное обеспечение лабораторного компьютера. Результаты расчёта без округления записать в табл. 3.

6.4.5. Аналогично п. 6.3.5. (соотношения (16)) вычислить абсолютную Δa и относительную δa погрешности определения коэффициента наклона прямой для доверительной вероятности (надёжности) $P = 0,68$ и числа измерений $n = 5$. Результаты расчёта без округления записать в табл. 3.

6.4.6. Используя соотношение (13), найти величину момента инерции гироскопа I_ω , результат без округления записать в табл. 3. Полученный результат можно рассматривать как единичное косвенное измерение (определение) величины момента инерции гироскопа.

6.4.7. Вычислить (в соответствии с (13)) относительную δI и абсолютную ΔI погрешности измерения момента инерции гироскопа:

$$\text{Var. } \alpha: \quad \delta I = \sqrt{(\delta m)^2 + (\delta l_0)^2 + (\delta a)^2} \rightarrow \Delta I = I \cdot \delta I,$$

$$\text{Var. } \beta: \quad \delta I = \sqrt{(\delta m)^2 + (\delta a)^2} \rightarrow \Delta I = I \cdot \delta I,$$

где для относительных погрешностей измерения (или задания) массы груза и его координаты (для случая Var. α) можно принять следующие значения:

$$\delta m = 1\%, \quad \delta l_0 = 3\%$$

(погрешность координаты груза δl_0 для эксперимента Var. β уже учтена в погрешности коэффициента наклона δa).

Результаты расчёта без округления записать в табл. 3.

6.4.8. После округления записать результат измерения момента инерции гироскопа I_ω в стандартной форме в табл. 3.

6.5. Анализ результатов исследования

6.5.1. Сравнить результаты измерений момента инерции гироскопа (I и δI), полученные в п.п. 5.2., 6.3. и 6.4. а также величины коэффициентов наклона $a_{гр}$ и a_p , найденные в п.п. 6.3. и 6.4.

6.5.2. Объединить результаты измерений момента инерции гироскопа, полученные в п.п. 6.3. и 6.4, используя соотношения (считаем, что $\delta I_l \sim \delta I_\omega$):

$$I = \frac{I_l + I_\omega}{2}, \quad \delta I = \left(\frac{\delta I_l + \delta I_\omega}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \Delta I = I \cdot \delta I.$$

6.5.3. По работе сделать выводы.

7. Вопросы для допуска к лабораторной работе

1. Что такое момент импульса материальной точки (МТ) и абсолютно твёрдого тела (АТТ) относительно центра вращения – \vec{L} и оси вращения – L_z ?
2. Что такое момент силы относительно точки (центра) и оси?
3. Что такое момент инерции тела? Поясните понятие аддитивности.
4. Сформулируйте теорему Штейнера.
5. Вычислите момент инерции стержня (масса m , длина L) относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его край. Используйте два способа: непосредственное интегрирование и применение теоремы Штейнера.
6. Что называют гироскопом? Что такое прецессия, регулярная прецессия, гироскопический эффект?
7. От чего и как зависит угловая скорость прецессии гироскопа? Что необходимо для регулярности прецессии?
8. Каким образом на лабораторной установке можно менять момент импульса L гироскопа и момент силы M ? Как ещё можно было бы изменять эти параметры?
9. Какие графики предлагается строить в отчёте по этой работе? Какой они имеют вид и почему?
10. Попробуйте обосновать выбор значений относительных погрешностей δt , $\delta \varphi$, δl , $\delta \omega$, δm (в том числе δt и $\delta \varphi$ – при ручном измерении), предложенный в п. 5.2.6.
11. Чем объяснить различие формул для вычисления относительных погрешностей δI момента инерции гироскопа в п.п. 6.3.7. и 6.4.7. и отсутствие различий при вычислении абсолютных погрешностей (доверительных полуинтервалов) ΔI ?
12. Поясните причины (смысл) различия процедур вычисления погрешностей δI в случаях Var. α и Var. β .
13. Как изменится погрешность измерения момента инерции гироскопа, если доверительная вероятность (надёжность) станет $P = 0,95$ (вместо 0,68)?
14. Как изменится величина момента инерции гироскопа, если доверительная вероятность (надёжность) станет $P = 0,95$ (вместо 0,68)?

8. Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 1. М.: Наука, 1998.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высшая школа, 1990.
3. Дж. Сквайрс. Практическая физика. М.: Мир, 1971.
4. Ильясова Т.М., Петросов В.А. Обработка результатов измерений на примерах математического и пружинного маятников. Пособия по выполнению лабораторных работ М-1м и М-1п. – М.: МГТУ ГА, 2009.

Таблица 1

z_0 , м	z_B , м	$l = z_B - z_0$, м	n , об/мин	φ , град	φ , рад	t , с
$\omega = (c^{-1}); \quad \Omega = (c^{-1}); \quad I_{\text{эксп}} = (кг \cdot м^2); \quad I_{\text{теор}} = (кг \cdot м^2);$ $\delta I = ; \quad \Delta I = (кг \cdot м^2); \quad I = \pm (кг \cdot м^2)$						

Таблица 2

$n_0 =$ (об/мин); $\omega_0 =$ (1/с); $\varphi =$ (рад)						
l_i , м						
t_i , с						
Ω_i						
$a_{\text{гр}} = (c^{-1} м^{-1}); \quad a_p = (c^{-1} м^{-1}); \quad \sigma_p = (c^{-1} м^{-1}); \quad I_l = (кг \cdot м^2);$ $\Delta a = (c^{-1} м^{-1}) \quad P = 0,68; \quad \delta a = ; \quad \delta I = ; \quad \Delta I = ;$ $I_l = \pm (кг \cdot м^2) \quad P = 0,68$						

Таблица 3

<u>Var.</u> $l_0 =$ (м); $\varphi =$ (рад)						
n_i , об/мин						
t_i , с						
ω_i , c^{-1}						
$1/\omega_i$, с						
Ω_i , c^{-1}						
$a_{\text{гр}} = (c^{-2}); \quad a_p = (c^{-2}); \quad \sigma_p = (c^{-2}); \quad I_{\omega} = (кг \cdot м^2);$ $\Delta a = (c^{-2}) \quad P = 0,68; \quad \delta a = ; \quad \delta I = ; \quad \Delta I = ;$ $I_{\omega} = \pm (кг \cdot м^2) \quad P = 0,68$						

Редактор Т.П. Воронина

	Подписано в печать 20.03.09г.	
Печать офсетная	Формат 60x84/16	0,84 уч.-изд. л.
0,93 усл.печ.л.	Заказ № 742/	Тираж 200 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а

© Московский государственный
технический университет ГА, 2009