

Лекция 12. Алгоритмы.

Часть 2. Алгоритмы теории графов.

Задача о лидере

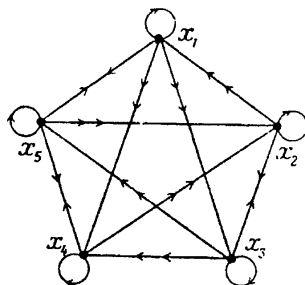
Пусть дано некоторое множество лиц X , а наличие дуги между x и y выражает превосходство (доминирование) x над y .

Задача, которую мы здесь ставим, заключается в определении лидера, т. е. того лица, которое следует считать победителем в турнире, или наиболее влиятельным членом организации, обладающим реальным политическим весом и силой. Эта задача на практике оказывается достаточно сложной. Проблема состоит в том, чтобы проследить отдаленные связи, учесть опосредованное влияние.

Поставим задачу измерения силы каждого лица. Когда это понятие будет точно определено, лидером мы объявим то лицо, чья сила — наибольшая.

Рассмотрим для определенности шахматный турнир с пятью участниками x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

Выигрыш x_i у x_j изображаем двумя дугами, направленными из x_i в x_j , если x_i и x_j сыграли вничью, то рисуем одну дугу из x_i в x_j и одну дугу из x_j в x_i . Наконец, при каждой вершине строим петлю, что указывает, что любой игрок равен по силе самому себе. Если турнир завершен, то получается **граф** G , например, как на рисунке.



Этому графу соответствует **матрица смежности**, каждый элемент которой p_{ij} показывает количество путей, ведущих из вершины i в вершину j .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы P удовлетворяют условию $p_{ij} = p_{ji}$.

Обозначим через $p_{ij}(k)$ общий элемент матрицы P^k , т. е. количество путей длины k , идущих из x_i в x_j , и рассмотрим сумму по строке таких элементов $p_i(k)$

$$p_i(k) = p_{i1}(k) + p_{i2}(k) + p_{i3}(k) + p_{i4}(k) + p_{i5}(k)$$

Число $p_i(k)$ назовем силой порядка k игрока x_i . Разберемся подробнее в новых понятиях.

Сила порядка 1 образуется сложением элементов матрицы P по строкам, т. е.

$$p_1(1) = 1 + 0 + 2 + 2 + 1 = 6$$

$$p_2(1) = 2 + 1 + 1 + 0 + 0 = 4$$

$$p_3(1) = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 = 6$$

$$p_4(1) = 0 + 2 + 0 + 1 + 1 = 4$$

$$p_5(1) = 1 + 2 + 0 + 1 + 1 = 5$$

Математически, мы просто умножаем матрицу P на вектор, $f_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$, состоящий полностью из единиц — Pf_0 . С точки зрения этой силы $p_i(1)$ имеем двух победителей: x_1 и x_3 , каждый из которых превосходит наибольшее число игроков.

Силу порядка 2 каждого игрока можно найти путем сложения очков тех игроков, с которыми он сыграл вничью, и удвоенных количеств очков игроков, у которых он выиграл; в данном примере

$$p_1(2) = 1 \cdot 6 + 0 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 31$$

$$p_2(2) = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 0 + 0 = 22$$

$$p_3(2) = 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 28$$

$$p_4(2) = 0 + 2 \cdot 4 + 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 17$$

$$p_5(2) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 23$$

И здесь мы просто вычисляем произведение $Pf_1 = P^2 f_0$, где $f_1 = (6, 4, 6, 4, 5)$. Получается вектор $f_2 = (31, 22, 28, 17, 23)$. На этот раз игрок x_1 занимает один первое место, и это обусловлено тем, что он победил более сильных игроков, чем те, которых победил x_3 . Продолжим итерацию:

$$p_1(3) = 1 \cdot 31 + 0 + 2 \cdot 28 + 2 \cdot 17 + 1 \cdot 23 = 144$$

$$p_2(3) = 2 \cdot 31 + 1 \cdot 22 + 1 \cdot 28 + 0 + 0 = 112$$

$$p_3(3) = 0 + 1 \cdot 22 + 1 \cdot 28 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 23 = 130$$

$$p_4(3) = 0 + 2 \cdot 22 + 0 + 1 \cdot 17 + 1 \cdot 23 = 84$$

$$p_5(3) = 1 \cdot 31 + 2 \cdot 22 + 0 + 1 \cdot 17 + 1 \cdot 23 = 115$$

Распределение мест здесь то же, что и в предыдущем случае: x_1, x_3, x_5, x_2, x_4 , видимо, оно стабилизировалось. И действительно, можно убедиться, что при дальнейшем продолжении итерации порядок мест остается неизменным. Стабилизация означает, что в результате некоторого количества итераций получается вектор, который лежит практически на той же прямой, то есть только скалярным множителем отличается от предыдущего вектора: $Px = \lambda x$. Отсюда ясно, что в нашем методе мы фактически вычисляем один из собственных векторов матрицы P .

Мы видим, что длина вектора все время возрастает. Это побуждает нас перейти к нормированным векторам и определить **силу игрока** x_i как предел при $k \rightarrow \infty$ соотношения

$$\pi_i(k) = \frac{p_i(k)}{p_1(k) + p_2(k) + \dots + p_5(k)}$$

Можно показать, что вследствие теоремы Фробениуса-Перрона этот предел всегда существует.

ЗАДАЧКА НА ДОМ

Чемпионат эконофака. В футбольном чемпионате все команды успели сыграть по одному разу друг с другом: команда 1-го курса выиграла у второго и третьего, но проиграла четвертому, второй курс нанес поражение третьему и четвертому, а третий курс выиграл у четвертого. Поскольку началась сессия, чемпионат пришлось прервать и выяснять все отношения на бумаге. Изобразите соотношения силы команд в виде ориентированного графа. Рассчитайте соотношение силы команд после одной игры (сила первого порядка). При этом, правда, остаются некоторые неясности (какие?), так что лучше продолжить игры уже мысленно, приближенно рассчитав предельный вектор относительной силы команд (проведите еще две итерации расчетов, вычислив силу третьего порядка). Исчезли ли при этом все неясности? Соответствуют ли вычисленные рейтинги содержательным соображениям и Вашей интуиции?

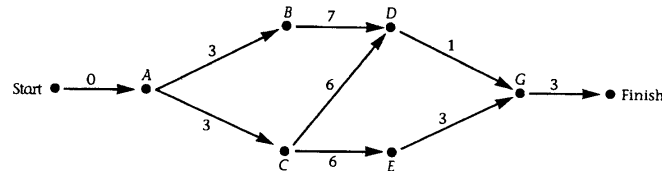
Определение длины критического пути.

Очень полезными в экономике оказываются задачи определения продолжительности проекта. Любой хороший менеджер знает, что если сроки поджимают, то в каждый момент времени надо обращать внимание только на одно-два важных дела, тогда как остальные только отвлекают. Это связано с тем, что в каждый момент времени, даже если все работники заняты, реально только один или несколько из них выполняют работу, которая действительно критична для выполнения всего проекта. Это можно увидеть на следующем простом условном примере.

Введем следующие понятия: **работой** будем называть направленную дугу графа (стрелку), которая начинается и заканчивается в некоторых **событиях** (изображаемых графически точками). Таким образом, у всякой работы есть начало и конец, события обозначаются буквами A, B, C, \dots , а работы – парами букв, например AB . Каждая работа характеризуется своей продолжительностью (число над дугой графа). Некоторые работы могут выполняться независимо от других, тогда как другие обусловлены наступлением того или иного события. Например, нельзя начинать выкладывать из кирпича стены до того, как вырыт котлован и уложен фундамент дома. Удобно ввести два особых (иногда фиктивных) события – старт (до начала всех работ) и финиш (когда проект закончен). Например, известно, что продолжительности работ заданы таблицей, в третьей строке которой записаны также условия предшествования для каждой из работ (считается, что событие X произошло, если выполнены все работы, входящие в X).

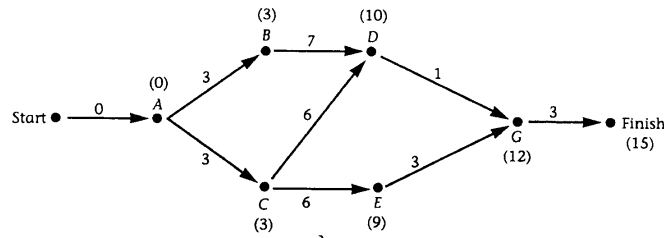
AB	BD	DG	AC	CE	EG	CD	$G\text{Finish}$
3	7	1	3	6	3	6	3
	B	D		C	E	C	G

Гораздо нагляднее весь проект выглядит в виде графа



Из чертежа очевидно, что, например, работник, выполняющий работу CD , может немного расслабиться, ведь событие D все равно не наступит, пока не будет закончена более продолжительная работа BD (предшествующие события B и D наступают одновременно).

Чтобы понять, какие работы действительно являются критическими для осуществления проекта, так что стоит напрягаться в их выполнении (а менеджеру – зорко присматривать за ними), введем понятие **наиболее раннего времени наступления события**. Для этого припишем событию A наиболее раннее время наступления 0, а далее, продвигаясь по стрелкам от старта к финишу, будем снабжать каждую вершину числом, которое является максимумом суммы «наиболее раннее время наступления предшествующего события плюс продолжительность работы». Например, для вершин B и D таким числом служит 3 (сумма $0+3$), а для вершины D таким числом будет максимум из чисел $(3+7)$ и $(3+6)$, то есть 10. В конце концов вершина Finish получит свое число – наиболее раннее время завершения всего проекта.



Теперь введем понятие **критического пути**: это последовательность работ от старта к финишу, увеличение продолжительности каждой из которых ведет к увеличению продолжительности всего проекта.

Для определения критического пути нужно наоборот, двигаться от конца к началу, разыскивая ту работу (или те работы) для которой достигается максимум в определении наиболее раннего времени наступления события. Например, в точке G мы выбираем работу EG , поскольку именно на ней выполняется условие максимальности ($12=9+3$, но $12<10+1$). В итоге получаем, что в нашем случае критическим будет путь $ACEG$.

ЗАДАЧКА НА ДОМ

Управление проектом. Каждая работа обозначена двумя буквами, обозначающими начало и конец работы. Конец одной работы является началом другой, причем любая работа может начинаться только после окончания всех работ, логически предшествующих данной (например DG может начинаться только после наступления события D). В таблице указаны продолжительности работ (в днях). События A, B, C происходят в начале одновременно. Z – конец проекта.

Работы	AD	BE	CE	CF	DG	EG	DH	FI	GZ	HZ	IZ
Время	6	9	8	8	6	4	5	3	5	6	5

Восстановите логическую последовательность работ и изобразите в виде графа весь проект (удобно ввести условное начало, соединенное фиктивными работами нулевой продолжительности с событиями A, B, C). Рассчитайте продолжительность проекта.

После прибытия еще одной бригады продолжительность работы BE сократилась до 8 дней. Удалось ли за счет этого уменьшить общую продолжительность проекта?

Оказалось возможным нанять еще две бригады (дополнительно к уже использованной в предыдущем пункте), которые могут помочь сократить на 2 дня любую работу или на 1 день сразу две работы. Каковы ваши предложения по наиболее рациональному использованию двух новых бригад?