Минимизация логических функций методом Куайна

Метод Куайна — способ представления функции в ДНФ или КНФ с минимальным количеством членов и минимальным набором переменных.[1] [2] [3]

Преобразование функции можно разделить на два этапа:

- на первом этапе осуществляется переход от канонической формы (СДНФ или СКНФ) к так называемой ***сокращённой форме***;
- на втором этапе — переход от сокращённой формы к ***минимальной форме***.

Первый этап (получение сокращённой формы)

Представим, что заданная функция $\mathbf{f}$ представлена в СДНФ. Для осуществления первого этапа преобразование проходит два действия:

1. *Операция склеивания*;
2. *Операция поглощения*.

Операция склеивания сводится к нахождению пар членов, соответствующих виду $w \cdot x$ или $w \cdot \overline{x}$, и преобразованию их в следующие выражения: $w \cdot x \lor w \cdot \overline{x} = w \cdot \left(x \lor \overline{x}\right) = w$. Результаты склеивания w теперь играют роль дополнительных членов.

Потом выполняется *операция поглощения*. Она основана на равенстве $w \lor w \cdot z = w \cdot \left(1 \lor z\right) = w$ (член $\mathbf{w}$ поглощает выражение $w \cdot z$). Вследствие этого действия из логического выражения вычёркиваются все члены, поглощаемые другими переменными, результаты которых получены в *операции склеивания*.

Обе операции первого этапа могут выполняться до тех пор, пока это может быть осуществимо.

Применение этих операций продемонстрировано в таблице:

$\mathbf{x_1}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\mathbf{x_2}$	0	0	1	1	0	0	1	1
$\mathbf{x_3}$	0	1	0	1	0	1	0	1
$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3)$	0	0	1	0	1	1	1	1

СДНФ выглядит так:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \lor x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \lor x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \lor x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \lor x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Результат операции склеивания нужен для преобразования функции на втором этапе (поглощения)

Членами результата склеивания являются

Член $x_2 \cdot \overline{x_3}$ поглощает те члены исходного выражения, которые содержат $x_2 \cdot \overline{x_3}$, то есть первый и четвёртый. Эти члены вычёркиваются. Член $x_1 \cdot \overline{x_2}$ поглощает второй и третий, а член $x_1 \cdot x_3$ — пятый член исходного выражения.

Повторение обеих операций приводит к следующему выражению:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = x_2 \cdot \overline{x_3} \lor \cancel{x_1 \cdot \overline{x_2}} \lor \cancel{x_1 \cdot \overline{x_3}} \lor \cancel{x_1 \cdot x_3} \lor \cancel{x_1 \cdot \overline{x_2}} \lor x_1$$

Здесь склеивается пара членов $x_1 \cdot \overline{x_2}$ и $x_1 \cdot x_2$ (склеивание пары членов $x_1 \cdot \overline{x_3}$ и $x_1 \cdot x_3$ приводит к тому же результату), результат склеивания $\mathbf{x_1}$ поглощает 2-, 3-, 4-, 5-й члены выражения. Дальнейшее проведение операций склеивания и поглощения оказывается невозможным, сокращённая форма выражения заданной функции (в данном случае она совпадает с минимальной формой)

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = x_2 \cdot \overline{x_3} \lor x_1$$

Члены сокращённой формы (в нашем случае это $x_2 \cdot \overline{x_3}$ и $\mathbf{x_1}$) называются *простыми импликантами* функции. В итоге, мы получили наиболее простое выражение, если сравнивать его с начальной версией — СДНФ. Структурная схема такого элемента показана на рисунке справа.

Второй этап(табличный) (получение минимальной формы)

Как и на первом этапе, в полученном равенстве могут содержаться члены, устранение которых никаким образом не повлияет на конечный результат. Следующий этап минимизации — удаление таких переменных. Таблица, представленная ниже, содержит значения истинности функции. По ней будет собрана следующая СДНФ.

$\mathbf{x_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{x_2}$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$\mathbf{x_3}$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$\mathbf{x_4}$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3, x_4)$	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

СДНФ, собранная по этой таблице выглядит следующим образом:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot$$

Конечное выражение достигается за счёт повторного использования операций склеивания и поглощения:

$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \vee x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Члены этого выражения являются **простыми импликантами** выражения. Переход от сокращённой формы к минимальной осуществляется с помощью импликантной матрицы.

Члены СДНФ заданной функции вписываются в столбцы, а в строки — простые импликанты, то есть члены сокращённой формы. Отмечаются столбцы членов СДНФ, которые поглощаются отдельными простыми импликантами. В следующей таблице простая импликанта $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$ поглощает члены $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$ и $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$(в первом и во втором столбцах поставлены крестики).

Импликантная матрица

Простая импликанта	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$
$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	×	×				
$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4}$	×		×			
$\overline{x_1} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$			×	×		
$x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$				×	×	
$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$					×	×

Вторая импликанта поглощает первый и третий члены СДНФ (указано крестиками) и т. д. Импликанты, не подлежащие исключению, образуют *ядро*. Такие импликанты определяются по вышеуказанной матрице. Для каждой из них имеется хотя бы один столбец, перекрываемый только этой импликантой.

В нашем примере ядро составляют импликанты $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$ и $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$(ими перекрываются второй и шестой столбцы). Исключение из сокращённой формы одновременно всех импликант, не входящих в ядро, невозможно, так как исключение одной из импликант может превратить другую в уже нелишний член.

Для получения минимальной формы достаточно выбрать из импликантов, не входящих в ядро, такое минимальное их число с минимальным количеством букв в каждом из этих импликант, которое обеспечит перекрытие всех столбцов, не перекрытых членами ядра. В рассматриваемом примере необходимо импликантами, не входящими в ядро, перекрыть третий и четвёртый столбцы матрицы. Это может быть достигнуто различными способами, но так как необходимо выбирать минимальное число импликант, то, очевидно, для перекрытия этих столбцов следует выбрать имликанту $\overline{x_1} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$.

Минимальная дизъюнктивная нормальная форма (МДНФ) заданной функции:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \qquad \textbf{(a)}$$

Структурная схема, соответствующая этому выражению приведена на рисунке слева. Переход от сокращённой схемы к МДНФ был осуществлён путём исключения лишних членов — импликант $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4}$ и $x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$. Покажем допустимость подобного исключения членов из логического выражения.

Импликанты $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4}$ и $x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$ становятся равными *лог. 1* соответственно при следующих наборах значений аргументов: $\mathbf{x_1}$ = 0, $\mathbf{x_2}$ = 0, $\mathbf{x_4}$ = 0 и $\mathbf{x_2}$ = 1, $\mathbf{x_3}$ = 1, $\mathbf{x_4}$ = 0.

Роль этих импликант в выражении сокращённой формы функции заключается лишь в том, чтобы на приведённых наборах значений аргументов присваивать функции $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ значение 1. Однако при этих наборах функция равна 1 из-за остальных импликант выражения. Действительно, подставляя набор значений, указанных выше в формулу (**а**), получаем:

- при $\mathbf{x_1}$ = 0, $\mathbf{x_2}$ = 0, $\mathbf{x_4}$ = 0

$$\mathbf{f}(0, 0, x_3, 0) = 1 \cdot 1 \cdot \overline{x_3} \vee \ 0 \cdot 0 \cdot x_3 \vee 1 \cdot x_3 \cdot 1 = \overline{x_3} \vee x_3 = 1;$$

- при $\mathbf{x_2}$ = 1, $\mathbf{x_3}$ = 1, $\mathbf{x_4}$ = 0

$$\mathbf{f}(x_1, 1, 1, 0) = \overline{x_1} \cdot 0 \cdot 0 \vee x_1 \cdot 1 \cdot 1 \vee \overline{x_1} \cdot 1 \cdot 1 = x_1 \vee \overline{x_1} = 1;$$

Использование метода для получения минимальной КНФ

Для получения Минимальной Конъюнктивной Нормальной Формы (МКНФ), используя метод Куайна, вводятся следующие критерии:

- для минимизации берётся не СДНФ, а СКНФ функции;
- склеиваемые пары членов меняются на: $w \vee x$ или $w \vee \overline{x}$;
- правило операции поглощения выглядит следующим образом:

$$z \cdot (z \vee y) = z \vee z \cdot y = z \cdot (1 \vee y) = z$$

Примечания

[1] Краткое описание метода Квайна (http://ptca.narod.ru/lec/lec4_1.html) *www.ptca.narod.ru*
[2] Лекция: Минимизация ФАЛ (http://works.tarefer.ru/50/100160/index.html) *www.works.tarefer.ru*
[3] Пример минимизации переключательной функции методом Квайна (http://matri-tri-ca.narod.ru/pf1.html) *matri-tri-ca.narod.ru*

Источники и основные авторы

Минимизация логических функций методом Куайна *Источник*: http://ru.wikipedia.org/w/index.php?oldid=39796005 *Редакторы*: Poker™, Secretary, Ботильда, РобоСтася, Четыре тильды, 18 анонимных правок

Источники, лицензии и редакторы изображений

Файл:Член операции склеивания №2, метод Квайна.PNG *Источник*: http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Файл:Член_операции_склеивания_№2,_метод_Квайна.PNG *Лицензия*: Public Domain *Редакторы*: Poker™

Лицензия